# Techniques Quantitatives de gestion
# Solutions des exercices

Thierry Lafay

2014

# Table des matières

# 1. Introduction à la logique

## Exercice 1

Par récurrence :

- $n = 1$ :
  il y a deux parties possibles : l'ensemble vide $\emptyset$ et $\{1\}$. Donc on trouve bien $2^1$ parties.
- $n \rightsquigarrow n+1$ :
  Pour dénombrer le nombre de parties de $\{1, ..., n+1\}$, on compte d'abord les parties ne contenant pas $n+1$. Il y en a par hypothèse de récurrence $2^n$ puis on dénombre les parties contenant $n+1$ et il est facile de montrer qu'il suffit d'ajouter à une partie de $\{1...n\}$ l'élément $n+1$. Il y en a donc aussi autant que le nombre de parties de $\{1..n\}$, à savoir $2^n$.
  En conclusion, il y a $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ parties de $\{1...n+1\}$.

Pour une démonstration directe, il suffit de remarquer qu'une partie de $\{1...n\}$ peut se coder avec un système binaire. En effet, il y a un isomorphisme entre ces parties et les vecteurs contenant n coordonnées où chaque coordonnée vaut soit $x_i = 1$ si l'élément $i$ appartient à la partie soit 0 dans le cas contraire. Ainsi la partie $\{1, 3, 4\}$ correspond au vecteur $(1, 0, 1, 1, 0, ....0)$. On cherche donc maintenant à dénombrer le nombre de vecteurs de ce type. Pour chaque coordonnée on a deux choix possibles de façon indépendante des autres coordonnées, il y a $n$ coordonnées. On a donc $2 \times 2 \times ... \times 2$ et ce $n$ fois, ce qui donne bien $2^n$ vecteurs possibles d'où la conclusion sur le nombre de parties de $\{1, 2, ...n\}$.

## Exercice 2

Il faut transcrire chaque phrase en une ou plusieurs assertions logiques.

1. D s'inscrit $\Rightarrow$ B ne s'inscrit pas
   D s'inscrit $\Rightarrow$ C ne s'inscrit pas
2. D ne s'inscrit pas $\Rightarrow$ A ne s'inscrit pas
3. A s'inscrit $\Rightarrow$ C s'inscrit
   B s'inscrit $\Rightarrow$ C s'inscrit

Nous allons maintenant montrer le résultat par une démonstration par l'absurde. Supposons que $A$ s'inscrit alors d'après l'assertion 3, $C$ s'inscrit. Puisque $C$ s'inscrit d'après la contraposée de l'assertion 1', alors $D$ ne s'inscrit pas. Si $D$ ne s'inscrit pas alors d'après l'assertion 2, $A$ ne s'inscrit pas. Cela contredit notre hypothèse donc Anatole ne s'inscrit pas.

## Exercice 3

Il faut transcrire chaque phrase en une ou plusieurs assertions logiques.

1. A est élu $\Rightarrow$ B n'est pas élu
2. T démissionne $\Rightarrow$ A se présente
3. A se présente $\Rightarrow$ A est élu
4. B ne se présente pas $\Rightarrow$ B n'est pas élu
5. T ne démissionne pas $\Rightarrow$ B ne se présente pas

Nous utilisons encore une démonstration par l'absurde. Supposons que $B$ est élu, alors d'après la contraposée de l'assertion 1 $A$ n'est pas élu. D'après la contraposée de l'assertion 3, $A$ ne se présente pas. D'après la contraposée de l'assertion 2, T ne démissionne pas. D'après l'assertion 5, $B$ ne se présente pas. Enfin d'après l'assertion 4, $B$ n'est pas élu. Nous aboutissons au contraire de notre hypothèse d'où la contradiction. Conclusion : $B$ ne peut pas être élu.

# 2. Rappels d'algèbre linéaire

## Exercice 1

Après application de la méthode du pivot de Gauss, on obtient le système triangulaire suivant :

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ y + z/2 = 1/2 \\ \frac{1+\alpha}{2} \times z = \frac{\alpha-1}{2} \end{cases}$$

Tout dépend de la dernière équation :

— *Premier cas :* $\alpha = -1$
  alors l'équation (3) devient $0 = -1$ ce qui est impossible donc $S = \emptyset$

— *Second cas :* $\alpha \neq -1$
  On obtient alors z puis y puis x, et $S = \left\{ \begin{pmatrix} x = \frac{\alpha}{\alpha+1} \\ y = \frac{1}{\alpha+1} \\ z = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \end{pmatrix} \right\}$.

## Exercice 2

Cet exercice est du même type que le précédent, excepté qu'il est plus simple pour le résoudre d'intervertir l'ordre des variables entre $y$ et $z$. On obtient alors par la méthode du pivot de Gauss le système suivant :

$$\begin{cases} x + z + \alpha \times y = 2 \\ z + (2-3\alpha)y = \alpha - 6 \\ (\alpha - 3)y = 3 - \alpha \end{cases}$$

Tout dépend de la dernière équation :

- *Premier cas :* $\alpha = 3$
  alors la dernière équation se simplifie en $0 = 0$ et le système devient sous déterminé, on choisit $y$ comme paramètre et on obtient alors :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 10y \\ y \\ -3 + 7y \end{pmatrix} | y \in \mathbb{R} \right\}$$

  On peut alors écrire les solutions sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} y$ avec $y \in \mathbb{R}$. Il s'agit donc de la droite dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et passant par le point $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- *Second cas :* $\alpha \neq 3$
  Il suffit de simplifier par $\alpha - 3$. On obtient alors $y$, puis en ré-injectant $z$ et enfin $x$, on a alors : $S = \left\{ \begin{pmatrix} x = 6 + 3\alpha \\ y = -1 \\ z = -4 - 2\alpha \end{pmatrix} \right\}$

## Exercice 3

1. On obtient $\det M = 3a$, donc $M$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$.
2. $M^{-1} = \frac{1}{3a} \begin{bmatrix} 4-4a & 4-a & -6 \\ -2 & -2 & 3 \\ a & a & 0 \end{bmatrix}$
3. Le système s'écrit $M.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ avec $a = 1$. La solution de ce système est donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

## Exercice 4

a) $M^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$

b) Pour épuiser les stocks, il faut déterminer x, y et z tels que :

$$\begin{cases} x+y+2z = 900 \\ x+z = 600 \\ x+y = 600 \end{cases} \Leftrightarrow M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix}$$

D'après la question 1 on a : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 900 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 150 \\ 150 \end{pmatrix}$

c) Le nouveau système devient $M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times w = \begin{pmatrix} 900 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix}$ Soit $M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix} - w \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on multiplie alors par $M^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 150 \\ 150 \end{pmatrix} - M^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times w = \begin{pmatrix} 450 - w/2 \\ 150 - 3w/2 \\ 150 - w/2 \end{pmatrix}$$

De plus, les quantités doivent toutes rester positives, il faut donc que $w \in [0; 100]$.

d) On peut paramétrer le profit en fonction de $w$. On obtient $\Pi = 3x + 3y + 2z + 8w = 3(450 - w/2) + 3(50 - 3w/2) + 2(150 - w/2) + 8w = 2\,100 + w$. On maximise en $w$ pour $w \in [0; 100]$. La fonction étant croissante, le maximum est obtenu pour $w = 100$, on a alors $x = 400$, $y = 0$ et $z = 100$ et le profit maximal vaut alors 2 200 euros.

# 3. L'optimisation linéaire

## Exercice 1

On intègre des variables d'écart dans le programme linéaire :

$$\max_{x,y} \quad 5x + 4y$$

$$\text{sous contraintes : } \begin{cases} x + y + e_1 & = & 400 & \text{(Carte Mère)} \\ 2x + y + e_2 & = & 600 & \text{(RAM)} \\ x + e_3 & = & 400 & \text{(Carte 3D)} \\ x, y, e_1, e_2, e_3 & \geq & 0 & \end{cases}$$

On déroule alors la méthode du simplexe :

| | | $x$ | $y$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $b$ | $b_i/a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $e_1$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 400 | 400 |
| | $e_2$ | $\boxed{2}$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 600 | $300 \leftarrow$ |
| | $e_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 400 | 400 |
| | $CR$ | $5\uparrow$ | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $L_1 - L_2'$ | $e_1$ | 0 | $\boxed{1/2}$ | 1 | $-1/2$ | 0 | 100 | $200 \leftarrow$ |
| $L_2/2$ | $x$ | 1 | $1/2$ | 0 | $1/2$ | 0 | 300 | 600 |
| $L_3 - L_2'$ | $e_3$ | 0 | $-1/2$ | 0 | $-1/2$ | 1 | 100 | $-200$ |
| $L_4 - 5L_2'$ | $CR$ | 0 | $3/2\uparrow$ | 0 | $-5/2$ | 0 | $-1\,500$ | |
| $2L_1$ | $y$ | 0 | 1 | 2 | $-1$ | 0 | 200 | |
| $L_2 - L_1'/2$ | $x$ | 1 | 0 | $-1$ | 1 | 0 | 200 | |
| $L_3 + L_1'/2$ | $e_3$ | 0 | 0 | 1 | $-1$ | 1 | 200 | |
| $L_4 - 3/2L_1'$ | $CR$ | 0 | 0 | $-3$ | $-1$ | 0 | $-1\,800$ | |

Tous les CR sont négatifs, donc le maximum vaut 1 800 ; il est atteint en $(x, y) = (200, 200)$, les variables d'écart sont $(e_1, e_2, e_3) = (0, 0, 200)$. Ainsi les stocks de carte mères et de RAM sont épuisés, par contre il reste 200 carte 3D. De plus, les variables hors base sont $e_1$ et $e_2$, leurs coûts réduits sont de $-3$ et $-1$, ils sont non nuls donc la solution est unique.

# Exercice 2

1) Soit x, y et z les quantités produites respectivement de A, B et C. Il faut avant tout recalculer les marges sur les produits qui correspondent au prix de vente moins les coûts de fabrication. Notons $M(x)$ la marge sur le produit correspondant à $x$. $M(x) = 80-1\times 20 = 60$, $M(y) = 130 - 1 \times 20 - 2 \times 10 = 90$, $M(z) = 30 - 1 \times 10 = 20$. Le programme linéaire est donc le suivant :

$$\max_{x,y,z} \; 60x + 90y + 20z \qquad\qquad \max_{x,y,z} \; 60x + 90y + 20z$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x + y \leq 100 & \text{(Bois)} \\ 2y + z \leq 120 & \text{(Fer)} \\ 2x + 4y + 3z \leq 400 & \text{(Heures)} \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \text{s.c.} \begin{cases} x + y + e_1 = 100 \\ 2y + z + e_2 = 120 \\ 2x + 4y + 3z + e_3 = 400 \\ x, y, z, e_i \geq 0 \end{cases}$$

2) On déroule alors la méthode du simplexe.

| | | $x$ | $y$ | $z$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $b$ | $b_i/a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $e_1$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 100 | 100 |
| | $e_2$ | 0 | $\boxed{2}$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 120 | $60 \leftarrow$ |
| | $e_3$ | 2 | 4 | 3 | 0 | 0 | 1 | 400 | 100 |
| | $CR$ | 60 | $90\uparrow$ | 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $L_1 - L_2'$ | $e_1$ | $\boxed{1}$ | 0 | $-1/2$ | 1 | $-1/2$ | 0 | 40 | $40 \leftarrow$ |
| $L_2/2$ | $y$ | 0 | 1 | $1/2$ | 0 | $1/2$ | 0 | 60 | $\infty$ |
| $L_3 - 2L_2'$ | $e_3$ | 2 | 0 | 1 | 0 | $-2$ | 1 | 160 | 80 |
| $L_4 - 90L_2'$ | $CR$ | $60\uparrow$ | 0 | $-25$ | 0 | $-45$ | 0 | $-5\,400$ | |
| $L_1$ | $x$ | 1 | 0 | $-1/2$ | 1 | $-1/2$ | 0 | 40 | $-80$ |
| $L_2$ | $y$ | 0 | 1 | $1/2$ | 0 | $1/2$ | 0 | 60 | 120 |
| $L_3 - 2L_1'$ | $e_3$ | 0 | 0 | $\boxed{2}$ | $-2$ | $-1$ | 1 | 80 | $40 \leftarrow$ |
| $L_4 - 60L_1'$ | $CR$ | 0 | 0 | $5\uparrow$ | $-60$ | $-15$ | 0 | $-7\,800$ | |
| $L_1 + L_3'/2$ | $x$ | 1 | 0 | 0 | $1/2$ | $-3/4$ | $1/4$ | 60 | |
| $L_2 - L_3'/2$ | $y$ | 0 | 1 | 0 | $1/2$ | $3/4$ | $-1/4$ | 40 | |
| $L_3/2$ | $z$ | 0 | 0 | 1 | $-1$ | $-1/2$ | $1/2$ | 40 | |
| $L_4 - 5L_3'$ | $CR$ | 0 | 0 | 0 | $-55$ | $-25/2$ | $-5/2$ | $-8\,000$ | |

Tous les CR sont négatifs, on est donc à l'optimum. La marge total maximale vaut 8 000 et elle est atteinte pour une production $(x, y, z) = (60, 40, 40)$, les variables d'écart sont toutes nulles, ce qui indique que tout le stock de bois, de fer et d'heures sur la chaîne de montage est épuisé.

3) Les variables hors base sont : $e_1$, $e_2$ et $e_3$, leurs coûts réduits sont respectivement de $-55$, $-25/2$ et $-5/2$, ils sont tous non nuls donc la solution est unique.

# 4. Dualité & Analyse Post-optimale

## Exercice 1

a) Il s'agit d'une analyse sur la troisième contrainte i.e. $e_3$. On reprend le tableau avec la colonne de $e_3$ et le vecteur $b$.

| | $e_3$ | $b$ | $b + 60e_3$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $1/4$ | 60 | 75 |
| $y$ | $-1/4$ | 40 | 25 |
| $z$ | $1/2$ | 40 | 70 |
| $CR$ | $-5/2$ | $-8\,000$ | $-8\,150$ |

Le nouveau vecteur de $b$ est bien resté positif, donc c'est la solution optimale. Le maximum vaut maintenant 8 150 et il est atteint en $(x, y, z) = (75, 25, 70)$, de plus $(e_1, e_2, e_3) = (0, 0, 0)$.

b) Il s'agit d'une analyse sur la seconde contrainte i.e. $e_2$. On reprend le tableau avec la colonne de $e_2$ et le vecteur $b$.

| | $e_2$ | $b$ | $b + 40e_2$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-3/4$ | 60 | 30 |
| $y$ | $3/4$ | 40 | 70 |
| $z$ | $-1/2$ | 40 | 20 |
| $CR$ | $-25/2$ | $-8\,000$ | $-8\,500$ |

Le nouveau vecteur de $b$ est bien resté positif, donc c'est la solution optimale. Le maximum vaut maintenant 8 500 et il est atteint en $(x, y, z) = (30, 70, 20)$, de plus $(e_1, e_2, e_3) = (0, 0, 0)$.

c) Supposons que le prix de B augmente de $\delta$, alors la marge de B est augmentée de $\delta$. Il suffit de reprendre le tableau optimal en ajoutant $\delta$ au CR du produit B puis de remettre en forme le tableau de façon à ce que le CR de $y$ soit nul. Pour ce faire, il faut reprendre la ligne associé à $y$ et la ligne des CR.

| | | $x$ | $y$ | $z$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $y$ | 0 | 1 | 0 | $1/2$ | $3/4$ | $-1/4$ | 40 |
| | $CR$ | 0 | $\delta$ | 0 | $-55$ | $-25/2$ | $-5/2$ | $-8\,000$ |
| $L_4 - \delta L_2$ | $CR'$ | 0 | 0 | 0 | $-55 - \frac{\delta}{2}$ | $-\frac{25}{2} - \frac{3}{4}\delta$ | $-\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\delta$ | $-8\,000 - 40\delta$ |

Pour que la solution reste optimale, il faut que les CR' restent tous positifs, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -55 - \delta/2 \leq 0 \\ -25/2 - 3/4\delta \leq 0 \\ -5/2 + \delta/4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -50/3 \leq \delta \leq 10$$

Ainsi, le prix ne doit pas diminuer de plus de 16,67 ou augmenter de plus de 10. La fourchette de prix du bien B doit donc rester entre 113,33 et 140 pour que la solution optimale reste la même (seul le profit change).

d) Il s'agit d'une analyse sur les prix duaux des matières premières. En effet, étant donné les CR sur les $e_i$, on en déduit qu'en plus du coût réel l'utilisation d'une unité de bois vaut 55, une unité de fer vaut 25/2 et une heure sur la chaîne de montage vaut 5/2 (en euros). Ainsi, le coût perçu pour la fabrication de $D$ est de $1 \times 55 + 4 \times 25/2 + 2 \times 5/2 = 110$. Le coût réel de fabrication est de $1 \times 20 + 4 \times 10 = 60$. Le coût total est donc de 170 euros. Ainsi, le prix minimal est de 170 euros pour que le produit $D$ devienne intéressant à produire.

# Exercice 2

1) Soit $x$ le nombre d'étagères produites, $y$ le nombre de tables produites et $z$ le nombres de chaises produites. Le programme de maximisation est alors :

$$\max_{x,y,z} \quad 10x + 30y + 50z \qquad\qquad \max_{x,y,z} \quad 10x + 30y + 50z$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} 2x + 3y & \leq 600 \\ x + y + z & \leq 800 \\ y + 2z & \leq 1200 \\ x, y, z & \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \text{s.c.} \begin{cases} 2x + 3y + e_1 & = 600 \\ x + y + z + e_2 & = 800 \\ y + 2z + e_3 & = 1200 \\ x, y, z, e_i & \geq 0 \end{cases}$$

2) On déroule alors la méthode du simplexe...

| | | $x$ | $y$ | $z$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $b$ | $b_i/a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $e_1$ | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 600 | $\infty$ |
| | $e_2$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 800 | 800 |
| | $e_3$ | 0 | 1 | $\boxed{2}$ | 0 | 0 | 1 | 1200 | 600 $\leftarrow$ |
| | $CR$ | 10 | 30 | 50 $\uparrow$ | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $L_1$ | $e_1$ | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 600 | 300 |
| $L_2 - L'_3$ | $e_2$ | $\boxed{1}$ | 1/2 | 0 | 0 | 1 | $-1/2$ | 200 | 200 $\leftarrow$ |
| $L_3/2$ | $z$ | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 600 | $\infty$ |
| $L_4 - 50L'_3$ | $CR$ | 10 $\uparrow$ | 5 | 0 | 0 | 0 | $-25$ | $-30\,000$ | |
| $L_1 - 2L'_2$ | $e_1$ | 0 | $\boxed{2}$ | 0 | 1 | $-2$ | 1 | 200 | 100 $\leftarrow$ |
| $L_2$ | $x$ | 1 | 1/2 | 0 | 0 | 1 | $-1/2$ | 200 | 400 |
| $L_3$ | $z$ | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 600 | 1200 |
| $L_4 - 10L'_2$ | $CR$ | 0 | 0 $\uparrow$ | 0 | 0 | $-10$ | $-20$ | $-32\,000$ | |

Tous les CR sont négatifs, on est donc à l'optimum.

3) La marge maximale est de 32 000 et elle est obtenue pour une production de $(x,\ y,\ z) = (200,\ 0,\ 600)$ avec $(e_1,\ e_2,\ e_3) = (200,\ 0,\ 0)$. Il faut donc produire 200 étagères et 600 chaises. Les variables d'écart indiquent qu'il ne reste que 200 unités de A non utilisées.

4) Dans la solution optimale donnée précédemment, aucune table n'est produite. Cependant, la variable hors base $y$ a un CR nul, la solution n'est donc pas unique et il est possible de déterminer une autre solution optimale où des tables seront produites. On fait donc entrer $y$ dans la base, le calcul des $b_i/a_i$ associés est reporté dans le tableau précédent de sorte que le pivot se situe dans la colonne $y$ et dans la ligne de $e_1$. En effectuant le pivot, on trouve alors une autre solution optimale :

| | $x$ | $y$ | $z$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | 0 | 1/2 | $-1$ | 1/2 | 100 |
| $x$ | 1 | 0 | 0 | $-1/4$ | 3/2 | $-3/4$ | 150 |
| $z$ | 0 | 0 | 1 | $-1/4$ | 1/2 | 1/4 | 550 |
| $CR$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-10$ | $-20$ | $-32\,000$ |

On obtient donc bien une autre solution optimale où tous les produits sont fabriqués. En effet, la marge maximale est toujours de 32 000 et la production optimale est $(x,\ y,\ z) = (150,\ 100,\ 550)$ avec cette fois un épuisement des stocks de matières premières.

5) Comme il reste des planches A, le choix doit se faire entre les planches B et C. Etant donné les CR des variables d'écart associées, on a 10 pour B et 20 pour C. Ainsi, marginalement une planche C rapporte plus, donc on est enclin à plutôt choisir les planches C.

6) Le problème est que le raisonnement marginal peut ne plus être valable pour 100 planches. Il faut donc calculer la nouvelle solution si l'on augmente de 100 le stock de la troisième contrainte. L'analyse est donc sur $e_3$ :

| | $e_3$ | $b$ | $b + 100e_3$ |
|---|---|---|---|
| $e_1$ | 1 | 200 | 300 |
| $x$ | $-1/2$ | 200 | 150 |
| $z$ | $1/2$ | 600 | 650 |
| $CR$ | $-20$ | $-32\,000$ | $-34\,000$ |

La base est restée réalisable car le nouveau vecteur $b$ est positif. Le raisonnement marginal reste vrai pour une augmentation de 100 planches. On est donc sûr qu'il fallait bien prendre les planches C. La production optimale devient $(x,\, y,\, z) = (150,\, 0,\, 650)$, de plus $(e_1,\, e_2,\, e_3) = (300,\, 0,\, 0)$. La nouvelle marge maximale est de $34\,000$ mais il faut y retirer le coût du stock, on obtient donc une marge de $34\,000 - 1\,500 = 32\,500$. Comme $32\,500 > 32\,000$, on est bien acheteur de ce stock.

7)

$$\max_{x,y,z} \quad 10x + 30y + 50z \qquad\qquad \min_{u_1,u_2,u_3} \quad 600u_1 + 800u_2 + 1200u_3$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} 2x + 3y & \leq & 600 \\ x + y + z & \leq & 800 \\ y + 2z & \leq & 1200 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ z & \geq & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \text{s.c.} \begin{cases} u_1 & \geq & 0 \\ u_2 & \geq & 0 \\ u_3 & \geq & 0 \\ 2u_1 + u_2 & \geq & 10 \\ 3u_1 + u_2 + u_3 & \geq & 30 \\ u_2 + 2u_3 & \geq & 50 \end{cases}$$

8) D'après les relations de dualité et l'optimum trouvé à la question 3 on a :

$$\begin{cases} x \neq 0 \Rightarrow 2u_1 + u_2 = 10 \\ z \neq 0 \Rightarrow u_2 + 2u_3 = 50 \\ e_1 \neq 0 \Rightarrow u_1 = 0 \end{cases}$$

On résout le système et on obtient la solution duale optimale $(u_1,\, u_2,\, u_3) = (0,\, 10,\, 20)$. Ceci correspond bien à la lecture de la ligne des CR dans le tableau primal optimal.

9) En calculant la valeur du minimum, on obtient : $600 \times 0 + 800 \times 10 + 1\,200 \times 20 = 32\,000$.

10) On retrouve la valeur du maximum, le théorème de dualité est bien vérifié ce qui conforte donc notre résultat de la troisième question.

# 5. Programmation linéaire avancé

## Exercice 1

Etant donné la contrainte d'égalité, on va utiliser la méthode des pénalités en ajoutant une variable artificielle $e'_3$ dans cette contrainte. L'objectif sera pénalisé de $Ae'_3$. Le programme sous forme standard est alors :

$$\max_{x,y} \quad 20x + 30y - A.e'_3$$
$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} 3x + 2y + e_1 & = & 400 \\ 2x + 4y + e_2 & = & 200 \\ 6x + 3y + e'_3 & = & 800 \\ x, y, e_1, e_2, e'_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

On effectue alors le simplexe avec une première étape qui consiste à modifier la fonction objectif pour la base $(e_1, e_2, e'_3)$. On ne reporte pas les opérations sur les lignes par manque de place...

| | $x$ | $y$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $b$ | $b_i/a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 400 | |
| $e_2$ | 2 | 4 | 0 | 1 | 0 | 200 | |
| $e'_3$ | 6 | 3 | 0 | 0 | 1 | 800 | |
| $CR$ | 20 | 30 | 0 | 0 | $-A$ | 0 | |
| $e_1$ | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 400 | $400/3$ |
| $e_2$ | 2 | 4 | 0 | 1 | 0 | 200 | $100 \leftarrow$ |
| $e'_3$ | 6 | 3 | 0 | 0 | 1 | 800 | $400/3$ |
| $CR$ | $20 + 6A \uparrow$ | $30 + 3A$ | 0 | 0 | 0 | $800A$ | |
| $e_1$ | 0 | $-4$ | 1 | $-3/2$ | 0 | 100 | |
| $x$ | 1 | 2 | 0 | $1/2$ | 0 | 100 | |
| $e'_3$ | 0 | $-9$ | 0 | $-3$ | 1 | 200 | |
| $CR$ | 0 | $-10 - 9A$ | 0 | $-10 - 3A$ | 0 | $-2\,000 + 200A$ | |

Tous les CR sont négatifs, la variable artificielle n'est pas sortie de la base, donc il n'y a pas de solution réalisable. Ainsi, le domaine n'est pas admissible et le maximum vaut $-\infty$.

## Exercice 2

On commence par écrire le programme de la première phase en injectant les variables d'écart standard et les variables artificielles :

$$\max_{e'_1, e'_2} \quad -e'_1 - e'_2$$
$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} 4x + 3y - e_1 + e'_1 & = & 300 \\ x + 2y - e_2 + e'_2 & = & 200 \\ 2x + 3y + e_3 & = & 600 \\ x, y, e_i, e'_j & \geq & 0 \end{cases}$$

On résout par la méthode du simplexe le programme de première phase en modifiant tout d'abord la fonction objectif pour la base $(e'_1, e'_2, e_3)$ :

| | $x$ | $y$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e'_1$ | $e'_2$ | $b$ | $b_i/a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e'_1$ | 4 | 3 | $-1$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 300 | |
| $e'_2$ | 1 | 2 | 0 | $-1$ | 0 | 0 | 1 | 200 | |
| $e_3$ | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 600 | |
| $CR$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-1$ | $-1$ | 0 | |
| $e'_1$ | $\boxed{4}$ | 3 | $-1$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 300 | $75 \leftarrow$ |
| $e'_2$ | 1 | 2 | 0 | $-1$ | 0 | 0 | 1 | 200 | 200 |
| $e_3$ | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 600 | 300 |
| $CR$ | $5 \uparrow$ | 5 | $-1$ | $-1$ | 0 | 0 | 0 | 500 | |
| $x$ | 1 | $3/4$ | $-1/4$ | 0 | 0 | $1/4$ | 0 | 75 | 100 |
| $e'_2$ | 0 | $\boxed{5/4}$ | $1/4$ | $-1$ | 0 | $-1/4$ | 1 | 125 | $100 \leftarrow$ |
| $e_3$ | 0 | $3/2$ | $1/2$ | 0 | 1 | $-1/2$ | 0 | 450 | 300 |
| $CR$ | 0 | $5/4 \uparrow$ | $1/4$ | $-1$ | 0 | $-5/4$ | 0 | 125 | |
| $x$ | 1 | 0 | $-2/5$ | $3/5$ | 0 | $2/5$ | $-3/5$ | 0 | |
| $y$ | 0 | 1 | $1/5$ | $-4/5$ | 0 | $-1/5$ | $4/5$ | 100 | |
| $e_3$ | 0 | 0 | $1/5$ | $6/5$ | 1 | $-1/5$ | $-6/5$ | 300 | |
| $CR$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-1$ | $-1$ | 0 | |

Dans le premier tableau, nous aurions pu faire entrer y plutôt que x. En revanche dans le second tableau, malgré l'égalité des $b_i/a_i$ des deux premières lignes, il faut choisir en priorité de faire sortir les variables artificielles, d'où notre choix de la seconde ligne. Nous nous arrêtons au troisième tableau car toutes les variables artificielles sont sorties, nous avons donc une solution admissible. Par contre, on peut remarquer qu'elle est dégénérée car $x$ qui est de base vaut zéro. Il reste à reprendre la fonction objectif initiale, à retirer les colonnes des variables artificielles et enfin à appliquer la méthode du simplexe pour résoudre le problème :

| | $x$ | $y$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $b$ | $b_i/a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 0 | $-2/5$ | $3/5$ | 0 | 0 | |
| $y$ | 0 | 1 | $1/5$ | $-4/5$ | 0 | 100 | |
| $e_3$ | 0 | 0 | $1/5$ | $6/5$ | 1 | 300 | |
| $CR$ | 8 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $x$ | 1 | 0 | $-2/5$ | $3/5$ | 0 | 0 | |
| $y$ | 0 | 1 | $1/5$ | $-4/5$ | 0 | 100 | |
| $e_3$ | 0 | 0 | $1/5$ | $6/5$ | 1 | 300 | |
| $CR$ | 0 | 0 | $6/5$ | $16/5$ | 0 | $-1\,000$ | |
| $e_2$ | $5/3$ | 0 | $-2/3$ | 1 | 0 | 0 | $0^-$ |
| $y$ | $4/3$ | 1 | $-1/3$ | 0 | 0 | 100 | $-300$ |
| $e_3$ | $-2$ | 0 | $\boxed{1}$ | 0 | 1 | 300 | $300 \leftarrow$ |
| $CR$ | $-16/3$ | 0 | $10/3 \uparrow$ | 0 | 0 | $-1\,000$ | |
| $e_2$ | $1/3$ | 0 | 0 | 1 | $2/3$ | 200 | 600 |
| $y$ | $\boxed{2/3}$ | 1 | 0 | 0 | $1/3$ | 200 | $300 \leftarrow$ |
| $e_1$ | $-2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 300 | $-150$ |
| $CR$ | $4/3 \uparrow$ | 0 | 0 | 0 | $-10/3$ | $-2\,000$ | |
| $e_2$ | 0 | $-1/2$ | 0 | 1 | $1/2$ | 100 | |
| $x$ | 1 | $3/2$ | 0 | 0 | $1/2$ | 300 | |
| $e_1$ | 0 | 3 | 1 | 0 | 2 | 900 | |
| $CR$ | 0 | $-2$ | 0 | 0 | $-4$ | $-2\,400$ | |

Tous les CR sont négatifs, on est donc à l'optimum. Le maximum vaut 2 400 et il est atteint en $(x, y) = (300, 0)$ avec $(e_1, e_2, e_3) = (900, 100, 0)$.

# 6. Les problèmes de transport

## Exercice 1

1) La somme des offres vaut $30 + 40 + 20 + 30 = 120$ et elle est égale à la somme des demandes qui vaut $40 + 20 + 60 = 120$. Le problème est donc bien posé.

2) On écrit le tableau des regrets et on construit au fur et à mesure la solution :

| | $I$ | $II$ | $III$ | $R_1$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 5 | 4 | 5 | 1 |
| $B$ | 5 | 3 | 9 | 2 |
| $C$ | 8 | 4 | 2 | 2 |
| $D$ | 1 | 2 | 1 | 1 |
| $R_1$ | $4 \uparrow$ | 1 | 1 | |
| $R_2$ | 0 | 1 | $3 \uparrow$ | |
| $R_3$ | 0 | 1 | $4 \uparrow$ | |

$\rightarrow$

| | $I$ | $II$ | $III$ | $Offre$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | | | 30 | 30 |
| $B$ | 10 | 20 | 10 | 40 |
| $C$ | | | 20 | 20 |
| $D$ | 30 | | | 30 |
| $Demande$ | 40 | 20 | 60 | $\boxed{120}$ |

3) Notre solution contient 6 variables non nulles et pas de cycle. Or une solution de base doit contenir $n + p - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ variables de base. Donc il s'agit bien d'une solution de base.

4) On reprend notre solution et on calcule le tableau des coûts réduits :

| | $I$ | $II$ | $III$ | $Offre$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | | | 30 | 30 |
| $B$ | $10^+$ | 20 | $10^-$ | 40 |
| $C$ | | | 20 | 20 |
| $D$ | $30^-$ | | $+$ | 30 |
| $Demande$ | 40 | 20 | 60 | $\boxed{120}$ |

$\rightarrow$

| | $I$ | $II$ | $III$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $^5/_4$ | $^4/_5$ | 5 | $-4$ |
| $B$ | 5 | 3 | 9 | 0 |
| $C$ | $^8/_{10}$ | $^4/_8$ | 2 | $-7$ |
| $D$ | 1 | $^2/_3$ | $^1/\boxed{-4}$ | $-4$ |
| $v_j$ | 5 | 3 | 9 | |

La variable entrante est $DIII$. On détermine alors le cycle sur les variables de base associées sur le tableau de gauche et la variable sortante est $BIII$. On utilise le cycle pour une variation de quantité $\Delta Q = 10$ et on obtient la nouvelle solution suivante :

| | $I$ | $II$ | $III$ | $Offre$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | | | 30 | 30 |
| $B$ | 20 | 20 | | 40 |
| $C$ | | | 20 | 20 |
| $D$ | 20 | | 10 | 30 |
| $Demande$ | 40 | 20 | 60 | $\boxed{120}$ |

$\rightarrow$

| | $I$ | $II$ | $III$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $^5/_0$ | $^4/_1$ | 5 | 5 |
| $B$ | 5 | 3 | $^9/_4$ | 5 |
| $C$ | $^8/_6$ | $^4/_4$ | 2 | 2 |
| $D$ | 1 | $^2/_3$ | 1 | 1 |
| $v_j$ | 0 | $-2$ | 0 | |

Tous les CR sont positifs, on est donc à l'optimum. Le transport optimal est donc représenté sur le tableau de gauche, le coût total minimal de transport vaut : $30 \times 5 + 20 \times 5 + 20 \times 3 + 20 \times 2 + 20 \times 1 + 10 \times 1 = 380$.

5) La solution n'est pas unique car l'un des CR est nul. On peut déterminer une autre solution de base optimale en faisant entrer dans la base la variable $AI$. On en déduit le cycle qui apparaît dans le tableau suivant :

| | $I$ | $II$ | $III$ | $Offre$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $+$ | | $30^-$ | 30 |
| $B$ | 20 | 20 | | 40 |
| $C$ | | | 20 | 20 |
| $D$ | $20^-$ | | $10^+$ | 30 |
| $Demande$ | 40 | 20 | 60 | $\boxed{120}$ |

La nouvelle solution de base optimale qui coûte aussi 380 et donc la suivante :

| | $I$ | $II$ | $III$ | $Offre$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 20 | | 10 | 30 |
| $B$ | 20 | 20 | | 40 |
| $C$ | | | 20 | 20 |
| $D$ | | | 30 | 30 |
| $Demande$ | 40 | 20 | 60 | $\boxed{120}$ |

## Exercice 2

1) La somme des offres est de 110 alors que la somme des demandes est de 120. On crée donc une offre $S_4$ fictive de 10 associée à des coûts $M$ où $M$ est très grand.

2) Nous avons désormais 4 offres et 4 demandes, les solutions de base réalisable doivent donc contenir $4 + 4 - 1 = 7$ variables de base et pas de cycle.

3) On écrit le tableau des regrets et on construit au fur et à mesure la solution :

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 2 | 1 | 2 | 4 | 1 | 0 | 2 |
| $S_2$ | 4 | 4 | 1 | 3 | 2 | $2\leftarrow$ | 1 |
| $S_3$ | 2 | 5 | 3 | 5 | 1 | 1 | $3\leftarrow$ |
| $S_4$ | $M$ | $M$ | $M$ | $M$ | 0 | 0 | 0 |
| $R_1$ | 0 | $3\uparrow$ | 1 | 1 | | | |

Ceci nous donne donc la solution suivante :

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $Offre$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | | 20 | | 10 | 30 |
| $S_2$ | | | 30 | 10 | 40 |
| $S_3$ | 30 | | | 10 | 40 |
| $S_4$ | | | | 10 | 10 |
| $Demande$ | 30 | 20 | 30 | 40 | $\boxed{120}$ |

4) On reprend la solution précédente et on calcule le tableau des CR associés :

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $^{2}/_{1}$ | 1 | $^{2}/_{0}$ | 4 | 4 |
| $S_2$ | $^{4}/_{4}$ | $^{4}/_{4}$ | 1 | 3 | 3 |
| $S_3$ | 2 | $^{5}/_{3}$ | $^{3}/_{0}$ | 5 | 5 |
| $S_4$ | $^{M}/_{3}$ | $^{M}/_{3}$ | $^{M}/_{2}$ | $M$ | $M$ |
| $v_j$ | $-3$ | $-3$ | $-2$ | 0 | |

Tous les CR sont positifs ou nuls donc c'est la solution optimale. Le transport optimal est celui obtenu dans le tableau de gauche précédent et son coût total est de $20 \times 1 + 10 \times 4 + 30 \times 1 + 10 \times 3 + 30 \times 2 + 10 \times 5 = 230$.

5) La solution n'est clairement pas unique puisqu'il y a deux CR égaux à zéro (il y a donc même plus de trois solutions de base optimales).

# 7. Introduction à la théorie des jeux

## Exercice 1

a) On commence par calculer le maxmin et le minmax :

| I \ II | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | Maxmin |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 |
| $B$ | 1 | 1 | 0 | 4 | 0 |
| $C$ | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Minmax | 3 | 3 | 2 | 4 | $_2\backslash^1$ |

Les valeurs sont différentes, il n'y a donc pas d'équilibre de Nash en stratégie pure. On cherche alors à éliminer les stratégies dominées. Pour le joueur II $a$ domine $d$ car $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (On rappelle que le joueur II préfère la case minimale car son paiement est l'opposé de l'entrée de la matrice). De même $c$ domine $b$ car $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. On supprime donc les stratégies $b$ et $d$. Dans le jeu restreint pour le joueur I $A$ domine $B$ car $(3,1) > (1,0)$. Nous avons alors la matrice 2*2 suivante pour laquelle nous cherchons l'équilibre en mixte :

| | I \ II | $a$ ($q$) | $c$ ($1-q$) |
|---|---|---|---|
| $p$ | $A$ | 3 | 1 |
| $1-p$ | $C$ | 0 | 2 |

En égalisant les paiements des stratégies du support, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} 3q+1-q = 0q+2(1-q) \\ 3p+0(1-p) = p+2(1-p) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} q^* = 1/4 \\ p^* = 1/2 \end{array}\right.$$

On reprend alors l'une des stratégies du support pour calculer son paiement espéré et obtenir la valeur du jeu. $v = \Pi_I(A) = 3q+1-q = 3/2$.
L'équilibre de Nash est en stratégie mixte ; il s'agit de $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C; \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}c)$, le paiement espéré de l'équilibre est $(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$.

b) On commence par calculer le maxmin et le minmax :

| I \ II | $a$ | $b$ | $c$ | Maxmin |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 3 | 2 | 1 | 1 |
| $B$ | 1 | 1 | 2 | 1 |
| $C$ | 0 | 3 | 2 | 0 |
| Minmax | 3 | 3 | 2 | $_2\backslash^1$ |

Les valeurs sont différentes, il n'y a donc pas d'équilibre de Nash en stratégie pure. De plus, il n'y a pas non plus de dominance entre stratégies pures. Nous essayons la méthode des poids en espérant que les supports soient maximaux :

Pour le joueur I :

| | $a-b$ | $b-c$ | Poids | Proba |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 1 | 3 | 3/8 |
| $B$ | 0 | $-1$ | 4 | 4/8 |
| $C$ | $-3$ | 1 | $\|-1\|$ | 1/8 |

Pour le joueur II :

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $A-B$ | 2 | 1 | $-1$ |
| $B-C$ | 1 | $-2$ | 0 |
| Poids | $\|-2\|$ | 1 | $\|-5\|$ |
| Proba | 2/8 | 1/8 | 5/8 |

On peut alors vérifier que le paiement espéré est le même sur chaque stratégie du support et on obtient alors la valeur du jeu, qui est $3 \times \frac{2}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{5}{8} = 13/8$. L'équilibre de Nash en stratégie mixte est donc $(\frac{3}{8}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{8}C; \frac{1}{4}a + \frac{1}{8}b + \frac{5}{8}c)$ et le paiement espéré est $(\frac{13}{8}; -\frac{13}{8})$.

## Exercice 2

a) On commence par calculer le maxmin et le minmax :

| I \ II | $a$ | $b$ | $c$ | Maxmin |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 3 | 1 | 4 | 1 |
| $B$ | 1 | 4 | 2 | 1 |
| $C$ | 1 | 2 | 1 | 1 |
| Minmax | 3 | 4 | 4 | $_3\backslash^1$ |

Les valeurs sont différentes, il n'y a donc pas d'équilibre de Nash en stratégie pure. Malheureusement, il n'y a pas non plus de dominance entre stratégies pures. Cependant on peut remarquer qu'il y a une dominance en mixte pour le joueur I. En effet, $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ domine $C$

car $(2, \frac{5}{2}, 3) > (1, 2, 1)$. On peut donc éliminer la stratégie $C$. Ensuite, dans le jeu restreint, la stratégie $a$ domine la stratégie $c$ pour le joueur II car $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Finalement, nous avons la matrice 2*2 suivante dont nous cherchons l'équilibre en stratégie mixte à support maximal :

| | | $q$ | $1-q$ |
|---|---|---|---|
| | I \ II | $a$ | $b$ |
| $p$ | $A$ | 3 | 1 |
| $1-p$ | $B$ | 1 | 4 |

En égalisant les paiements des stratégies du support, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 3q + 1 - q = q + 4(1-q) \\ 3p + 1 - p = p + 4(1-p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^* = 3/5 \\ p^* = 3/5 \end{cases}$$

On reprend alors l'une des stratégies du support pour calculer son paiement espéré et obtenir la valeur du jeu : $v = \Pi_I(A) = 3q + 1 - q = 11/5$.
L'équilibre de Nash est en stratégie mixte ; il s'agit de $(\frac{3}{5}A + \frac{2}{5}B; \frac{3}{5}a + \frac{2}{5}b)$, le paiement espéré de l'équilibre est $(\frac{11}{5}; -\frac{11}{5})$.

b) On commence par calculer le maxmin et le minmax :

| I \ II | $a$ | $b$ | Maxmin |
|---|---|---|---|
| $A$ | 3 | 0 | 0 |
| $B$ | 2 | 2 | 2 |
| $C$ | 0 | 3 | 0 |
| Minmax | 3 | 3 | $3 \backslash 2$ |

La difficulté de ce jeu est qu'il n'y a pas de dominance ni en stratégie pure ni en stratégie mixte alors que le jeu n'est pas carré. On revient alors à la définition d'un équilibre de Nash car le joueur I peut se garantir un paiement de 2 avec sa stratégie prudente $B$. Cependant pour former un équilibre de Nash, il faut que le joueur II joue en mixte entre $a$ et $b$ de façon à ce que le joueur I ne soit pas incité à choisir autre chose que sa stratégie $B$. Supposons donc que le joueur II choisit $a$ avec une probabilité $q$ et $b$ avec une probabilité $1-q$. Alors le paiement espéré de la stratégie $A$ est $3q$, et celui de la stratégie $C$ est $3(q-1)$. Ces deux paiements doivent rester inférieurs à 2. Ainsi, les équilibres de Nash sont du type $(B; q.a + (1-q).b)$ avec $q \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ pour un paiement de $(2; -2)$.

## Exercice 3

Il y a deux joueurs dans ce jeu, chaque joueur dispose de deux stratégies : N pour un menu normal ou S pour un menu spécial. On calcule les gains des joueurs en faisant la différence entre l'utilité attendue par la consommation du menu et son coût financier. La matrice de gain si chacun paie pour sa part est la suivante :

| I \ II | $N$ | $S$ |
|---|---|---|
| $N$ | $(\underline{4}, \underline{4})$ | $(\underline{4}, 2)$ |
| $S$ | $(2, \underline{4})$ | $(2, 2)$ |

Comme il ne s'agit pas d'un jeu à somme nulle, pour déterminer les équilibres de Nash nous soulignons les fonctions de même réponse (voir cours). Ainsi, l'équilibre de Nash dans ce cas est tel que les deux joueurs choisissent un menu normal pour un paiement de $(4, 4)$.

La matrice de gain s'ils se partagent l'addition est la suivante :

| I \ II | $N$ | $S$ |
|---|---|---|
| $N$ | $(4, 4)$ | $(1, \underline{5})$ |
| $S$ | $(\underline{5}, 1)$ | $(\underline{2}, \underline{2})$ |

L'équilibre de Nash est maintenant tel que les deux joueurs choisissent un menu spécial pour un paiement de $(2, 2)$ qui est Pareto dominé par l'option $(Normal, Normal)$. Nous pouvons remarquer que le partage d'addition crée une structure de dilemme du prisonnier au jeu. Chacun ne payant que la moitié du supplément au menu normal et touchant la totalité de l'utilité attendue, aura une tendance à sur-consommer.

# 8. Arithmétique

## Exercice 1

Nous allons appliquer la méthode égyptienne pour le calcul de cette exponentation. On cherche $135^{289}$ modulo [161]. Les colonnes $\alpha$ et $\gamma$ sont calculées suivant le modulo :

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|
| 135 | 289 | 1 |
| 32 | 144 | 135 |
| 58 | 72 | 135 |
| 144 | 36 | 135 |
| 128 | 18 | 135 |
| 123 | 9 | 135 |
| 156 | 4 | 22 |
| 25 | 2 | 22 |
| 142 | 1 | 22 |

$$\Rightarrow \quad 135^{289} \equiv 142 \times 22\,[161] \equiv 65\,[161]$$

## Exercice 2

a) Il faut utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer l'inverse :

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|
| 0 | 101 | – |
| 1 | 43 | – |
| $-2$ | 15 | 2 |
| 5 | 13 | 2 |
| $-7$ | 2 | 1 |
| 47 | 1 | 6 |

L'inverse de 43 modulo 101 est donc 47. On peut vérifier que $(43 \times 47 - 1)$ divisé par 101 donne un nombre entier, ce qui confirme notre résultat.

b) Il faut simplifier l'équation :

$$43X + 37 \equiv 49\,[101] \Leftrightarrow 43X \equiv 12\,[101]$$

Or d'après a) 43 est inversible modulo 101, on peut donc multiplier l'équivalence par cet inverse 47.

$$47 \times 43X \equiv 47 \times 12\,[101] \Leftrightarrow 1 \times X \equiv 564\,[101] \equiv 59$$

Ainsi $X = 59$.

## Exercice 3

Le problème est que le nombre est trop grand pour calculer le modulo avec une calculatrice de bureau. Nous allons donc utiliser la même méthode que dans le cours pour déterminer le nombre 1.810.386.192.201 modulo 97. Nous omettons la présence de [97] dans les équivalences suivantes : $1810386192201 \equiv 3 \times 18103861922 + 1 \equiv 54311585766 + 1 \equiv 3 \times 543115857 + 67 \equiv 1629347571 + 67 \equiv 3 \times 16293475 + 138 \equiv 48880425 + 138 \equiv 3 \times 488804 + 163 \equiv 1466412 + 163 \equiv 3 \times 14664 + 175 \equiv 43992 + 175 \equiv 3 \times 439 + 267 \equiv 1317 + 267 \equiv 1584$. Nous pouvons maintenant (et nous aurions pu le faire un peu plus tôt d'ailleurs) calculer directement le modulo. Pour mémoire, il suffit de faire 1584 : 97, de retirer la partie entière qui est 16 et de multiplier par 97. On trouve 32. La clé de la sécurité sociale est donc $97 - 32 = 65$.

# 9. Cryptographie

## Exercice 1

1) En premier lieu, il faut décomposer la base du cryptage en produit de nombres premiers. On obtient $n_N = 589 = 19 \times 31$, ainsi $(p-1)(q_1) = 18 \times 30 = 540$. Le cryptage est correct car $e_N = 11$ est premier avec 540 puisqu'ils n'ont pas de diviseurs communs. Pour déterminer la clé de déchiffrement $d_N$, il faut calculer l'inverse de 11 modulo 540 :

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|
| 0 | 540 | – |
| 1 | 11 | – |
| $-49$ | 1 | 49 |

$$\Rightarrow \quad d_N \equiv -49\,[540] \equiv 491\,[540]$$

2) De même, on obtient $n_A = 319 = 11 \times 29$, ainsi $(p-1)(q_1) = 10 \times 28 = 280$. Le cryptage est correct car $e_A = 187$ est premier avec 280 puisqu'ils n'ont pas de diviseurs communs. On calcule l'inverse de 11 modulo 540 :

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|
| 0 | 280 | – |
| 1 | 187 | – |
| $-1$ | 93 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |

$$\Rightarrow \; d_A \equiv 3\,[280]$$

3) Anderson envoie donc $67^{11}\,[589]$, il faut utiliser la méthode égyptienne pour connaître le message crypté $M$.

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|
| 67 | 11 | 1 |
| 366 | 5 | 67 |
| 253 | 2 | 373 |
| 357 | 1 | 373 |

$$\Rightarrow \quad M \equiv 397 \times 373\,[589] \equiv 242\,[589]$$

4) Soit respectivement $f_N$ et $f_A$ les fonctions de cryptage de Neo et Anderson. Soit $m$ le message clair que Neo veut envoyer, alors Neo envoie $M = f_A(f_N^{-1}(m))$. Pour décrypter ce message, Anderson calcule $m = f_N(f_A^{-1}(M))$.

5) Anderson a donc reçu le message crypté $M = 111$. Dans un premier temps, on commence par décrypter en calculant $f_A^{-1}(M) \equiv 111^3\,[319]$. Il n'est pas utile d'utiliser la méthode égyptienne, on trouve : $f_A^{-1}(M) \equiv 78\,[319]$. Dans le second temps, il faut authentifier le message en utilisant la clé publique de Neo et on calcule donc $m \equiv 78^{11}\,[589]$ :

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|
| 78 | 11 | 1 |
| 194 | 5 | 78 |
| 529 | 2 | 407 |
| 66 | 1 | 407 |

$$\Rightarrow \quad m \equiv 66 \times 407\,[589] \equiv 357\,[589]$$

En conclusion, le message clair envoyé par Neo est 357.

## Exercice 2

a) Etant donné la procédure de Diffie et Hellman, James doit envoyer $\beta \equiv p^A\,[n] \equiv 26^{11}\,[113]$. On utilise la méthode égyptienne :

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|
| 26 | 11 | 1 |
| 111 | 5 | 26 |
| 4 | 2 | 61 |
| 16 | 1 | 61 |

$$\Rightarrow \quad \beta \equiv 16 \times 61\,[113] \equiv 72\,[113]$$

b) Hubert doit envoyer $\alpha \equiv p^B\,[n] \equiv 26^{63}\,[113]$. On utilise la méthode égyptienne :

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|
| 26 | 63 | 1 |
| 111 | 31 | 26 |
| 4 | 15 | 61 |
| 16 | 7 | 18 |
| 30 | 3 | 62 |
| 109 | 1 | 52 |

$$\Rightarrow \quad \beta \equiv 109 \times 52\,[113] \equiv 18\,[113]$$

c) James a reçu $\alpha \equiv 18$. Le mot de passe est : $m \equiv \alpha^A\,[n] \equiv 18^{11}\,[113]$, on utilise la méthode égyptienne :

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|
| 18 | 11 | 1 |
| 98 | 5 | 18 |
| 112 | 2 | 69 |
| 1 | 1 | 69 |

$$\Rightarrow \quad m \equiv 1 \times 69\,[113], \quad m \equiv 69\,[113]$$

d) Hubert a reçu $\beta \equiv 72$. Pour lui le mot de passe est $m \equiv \beta^B\,[n] \equiv 72^{63}\,[113]$, on utilise la méthode égyptienne :

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|
| 72 | 63 | 1 |
| 99 | 31 | 72 |
| 83 | 15 | 9 |
| 109 | 7 | 69 |
| 16 | 3 | 63 |
| 30 | 1 | 104 |

$$\Rightarrow \quad m \equiv 30 \times 104\,[113], \quad m \equiv 69\,[113]$$

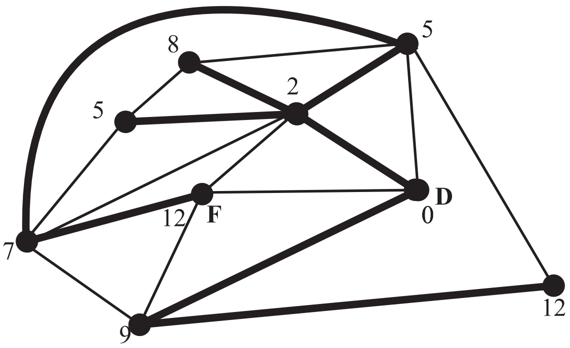
Conclusion : on retrouve bien le même mot de passe $m = 69$, après la procédure de Diffie et Hellman.

# 10. Graphes et problèmes de cheminement

## Exercice 1

Il faut appliquer l'algorithme de Dijkstra pour calculer étape après étape les potentiels des sommets. Nous reprenons donc le graphe en omettant les distances pour ne reporter que

**Schéma 1.** *Exercice 1*

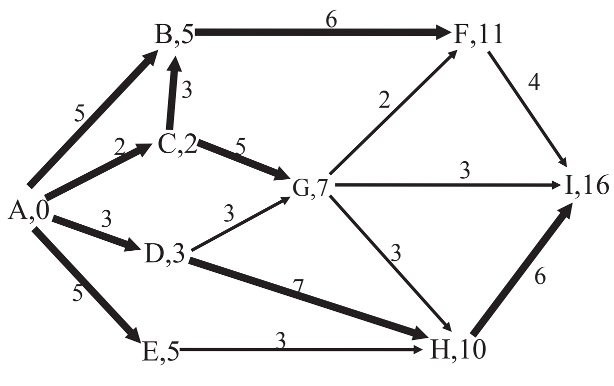



les potentiels finaux sur les sommets du graphe représenté sur le schéma 1. Nous avons mis en gras les arcs des chemins optimaux les plus courts.

## Exercice 2

Il s'agit d'un graphe orienté de racine A et sans cycle, on doit donc appliquer l'algorithme de Bellman. Nous indiquons les potentiels à droite des sommets et les arcs des chemins optimaux les plus longs sont en gras sur le graphe du schéma 2.

**Schéma 2.** *Exercice 2*



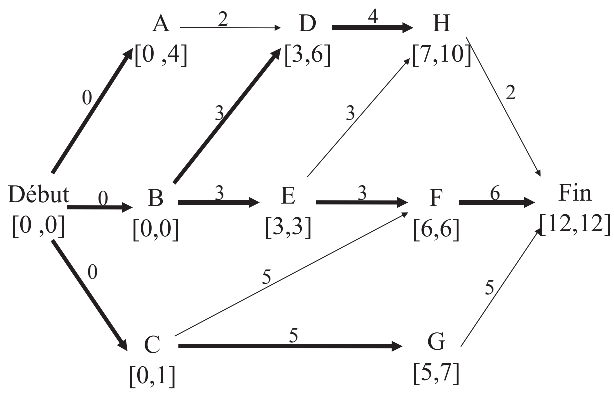

Nous pouvons remarquer qu'il y a deux chemins optimaux possibles pour aller au sommet $B$.

# 11. Problèmes d'ordonnancement

## Exercice 1

a) Nous reprenons donc le graphe en remplissant en dessous de chaque sommet la date au plus tôt puis la date au plus tard sur le graphe du schéma 3. De plus, nous mettons en gras les chemins les plus longs.

**Schéma 3.** *Graphe de l'exercice 1*




Ainsi, la durée minimale du projet est de 12. Les tâches critiques sont celles pour lesquelles la date au plus tôt est égale à la date au plus tard. Elles apparaissent le long du chemin critique (qui est le chemin le plus long du début à la fin). Les tâches critiques sont donc $B$, $E$ et $F$.

b) Nous obtenons alors le tableau des marges :

| Tâche | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + tôt | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 6 | 5 | 7 |
| + tard | 4 | 0 | 1 | 6 | 3 | 6 | 7 | 10 |
| Marge Totale | 4 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 2 | 3 |
| Marge Libre | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 |

c) L'allongement de durée de la tâche A est inférieur à sa marge totale, donc le projet peut toujours être accompli en 12 jours. Par contre, cet allongement est supérieur à la marge libre, ce qui indique que l'agenda des dates au plus tôt sera modifié.

d) L'allongement de durée de la tâche H est inférieur à sa marge totale et libre, donc le projet peut toujours être accompli en 12 jours avec le même agenda des dates au plus tôt.

e) L'allongement de durée de la tâche G est supérieur à sa marge totale de 1 journée, donc la durée minimale du projet passe à 13 jours. Par contre, comme H est une tâche finale, il n'est pas nécessaire d'adapter l'agenda des dates au plus tôt, seule la fin est repoussée d'une journée.

## Exercice 2

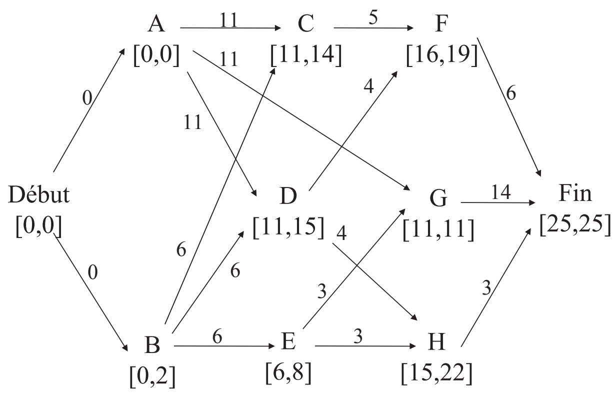
1) Le classement par niveau des tâches est le suivant :

| Niveau | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| | $A$<br>$B$ | $C$<br>$D$<br>$E$ | $F$<br>$G$<br>$H$ |

2) Le graphe associé à notre problème d'ordonnancement est représenté sur le graphe du schéma 4.

Les tâches critiques sont $A$ et $G$. La durée minimale du projet est de 25 jours.

**Schéma 4.** *Graphe de l'exercice 2*

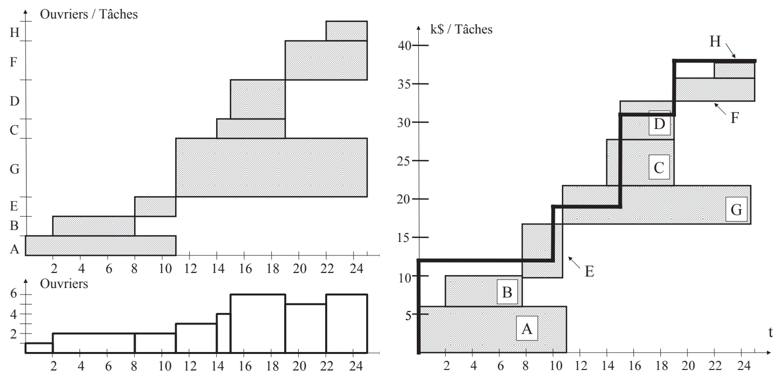



3) Nous obtenons alors le tableau des marges :

| Tâche | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* | *G* | *H* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + tôt | 0 | 0 | 11 | 11 | 6 | 16 | 11 | 15 |
| + tard | 0 | 2 | 14 | 15 | 8 | 19 | 11 | 22 |
| Marge Totale | 0 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 0 | 7 |
| Marge Libre | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 0 | 7 |

4) Le diagramme de Gantt des besoins d'ouvriers pour l'ordonnancement au plus tard ainsi que la courbe de charges sont tracés sur la partie gauche du graphique 1. Etant donné la courbe de charge, il faudra à un moment donné au moins 6 ouvriers pour réaliser l'ordonnancement au plus tard.

**Graphique 1.** *Exercice 2, questions 5 & 6*




5) Si l'on somme les besoins financiers pour accomplir toutes les tâches, on trouve 38 k$. Les flux financiers apportent un capital final de 38 k$, donc il est effectivement possible d'accomplir l'ensemble du projet. Le diagramme de Gantt de l'ordonnancement au plus tard pour les besoins financiers est représenté sur la partie droite du graphique 1. En gras nous avons tracé la courbe en escalier des flux financiers entrants. Nous remarquons alors que l'ordonnancement au plus tard n'est pas réalisable pas car le diagramme de Gantt passe au dessus de la courbe en gras, il est donc impossible d'accomplir le projet en 25 jours. On regarde les décalages qui correspondent au longueur des crêtes au-dessus de la courbe en escalier en gras. Il y a un problème entre t=8 et 10, puis entre t=11 et 15 (et t=14 et 15), et enfin entre t=15 et 19. La plus longue crête est de 4 jours, il suffit donc de décaler toutes

les dates au plus tard de 4 jours pour obtenir un ordonnancement réalisable et compatible avec les flux financiers. Le projet est alors faisable en $25 + 4 = 29$ jours.

6) L'allongement de durée sur la tâche B étant inférieur à la marge totale, la durée minimale du projet est inchangée. Par contre l'allongement est supérieur à la marge libre, donc l'ordonnancement au plus tôt sera modifié (E démarre en 7 au lieu de 6).

7) L'allongement de durée sur la tâche E est inférieur à la marge totale et à la marge libre, donc la durée minimale du projet est inchangée et l'ordonnancement au plus tôt reste le même.

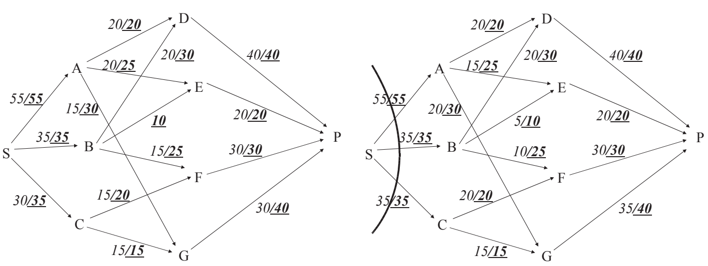
# 12. Flots dans un graphe

## Exercice 1

a) Si on liste les chemins de la source $S$ vers le puits $P$, on voit qu'il y a trois chemins passant par $A$, 3 chemins passant par $B$ et 2 chemins passant par $C$. Ainsi, nous avons 8 chemins de la source vers le puits.

b) Nous devons construire un premier flot. Nous utilisons les chemins passant par $A$ puis par $B$ puis par $C$, nous obtenons alors le flot à gauche du schéma 5.

**Schéma 5.** *Exercice 1*




Le flot à gauche du schéma n'est clairement pas optimal puisqu'on peut former la chaîne augmentante $SCFBEAGP$ pour un accroissement de flot de 5. On trouve alors le flot représenté sur la droite du schéma 5. Il est évident qu'il s'agit de la solution optimale puisque, si l'on applique Ford Fulkerson à partir de $S$, les adjacents sont $A$, $B$ et $C$ pour lesquels tous les arcs sont saturés. Le flot maximum vaut 125.

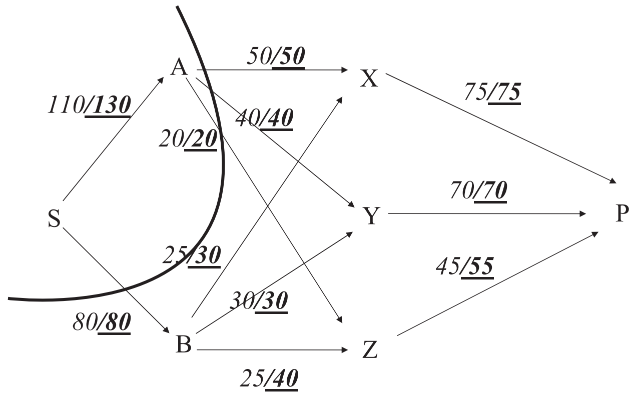
c) La coupe minimale est évidente puisque tous les arcs sortant de $S$ sont saturés. Il s'agit donc de la coupe associée aux arcs $SA$, $SB$ et $SC$ de valeur minimale 125. La coupe est représentée sur le graphe de droite du schéma 5.

## Exercice 2

a) Nous créons une source $S$ qui correspond au point d'offre et un puits $P$ qui correspond au point de demande. Partent de la source des arcs allant vers $A$ et $B$ et de capacité l'offre disponible, à savoir respectivement 130 et 80. Nous créons des sommets $X$, $Y$ et $Z$ pour chaque point de demande. Ces sommets sont reliés au puits pour une capacité égale à la demande maximale en chaque point. Enfin, pour chaque liaison usine/point de vente, nous créons un arc de capacité la valeur maximale de transport. Nous obtenons ainsi le graphe du schéma 6.

b) En utilisant les chemins directs de haut en bas, on obtient le flot du schéma 6. Ce flot est optimal comme nous le montre l'algorithme de Ford Fulkerson :

**Schéma 6.** *Exercice 2*




| Sommets marqués | Adjacents non marqués | Flot / Capacité résiduelle |
|---|---|---|
| S | A | 20← |
| | B | 0 |
| A | X | 0 |
| | Y | 0 |
| | Z | 0 |

On ne peut pas marquer le puits $P$, donc c'est bien le flot maximum de valeur $110+80 = 190$.

c) Etant donné le marquage de Ford Fulkerson, la coupe minimale correspond à la partition entre les sommets $\{S; A\}$ et les autres sommets. On trouve donc les arcs suivants : $SB$, $AX$, $AY$ et $AZ$ pour une capacité minimale de $80 + 50 + 40 + 20 = 190$. On retrouve bien le théorème de dualité puisque flot max= coupe min. La coupe est représentée sur le graphe du schéma 6.

d) Comme le flot est majoré par la valeur de la coupe minimale, il est évident qu'il faut augmenter l'un des arcs de la coupe minimale pour avoir une chance d'augmenter le flot. On remarque alors que comme $ZP$ a une capacité résiduelle de 10, on peut augmenter $AZ$ de 10 et le flot passe à 200. Mais en déterminant des chaînes augmentantes associées, on voit que l'on peut tout aussi bien augmenter de 10 l'arc $AX$ ou $AY$, l'effet sera le même et le flot maximum passera à 200.

# 13. Problème de couplage et d'affectation

## Exercice 1

a) Il y a bien sûr $5! = 120$ affectations possibles.

b) On commence par la réduction d'abord en ligne puis en colonne :

| | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ | $Min$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 13 | 4 | 7 | 6 | 7 | 4 |
| $M_2$ | 2 | 12 | 6 | 5 | 6 | 2 |
| $M_3$ | 8 | 9 | 4 | 10 | 7 | 4 |
| $M_4$ | 3 | 5 | 7 | 11 | 8 | 3 |
| $M_5$ | 2 | 4 | 6 | 2 | 1 | 1 |

$\rightarrow$

| | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 9 | 0 | 3 | 2 | 3 |
| $M_2$ | 0 | 10 | 4 | 3 | 4 |
| $M_3$ | 4 | 5 | 0 | 6 | 3 |
| $M_4$ | 0 | 2 | 4 | 8 | 5 |
| $M_5$ | 1 | 3 | 5 | 1 | 0 |
| $Min$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

On obtient finalement la matrice suivante sur laquelle nous cherchons un couplage maximal. Nous trouvons 4 couples et comme ce n'est pas une affectation nous effectuons le marquage des lignes et colonnes :

| | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 9 | $0^*$ | 3 | 1 | 3 | |
| $M_2$ | $0^*$ | 10 | 4 | 2 | 4 | $L$ |
| $M_3$ | 4 | 5 | $0^*$ | 5 | 3 | |
| $M_4$ | 0 | 2 | 4 | 7 | 5 | $L$ |
| $M_5$ | 1 | 3 | 5 | $0^*$ | 0 | |
| | $C$ | | | | | |

$$\Rightarrow h = \min_{L,\overline{C}} c_{ij} = 2$$

On applique donc l'algorithme en retirant 2 sur les éléments de type $L\overline{C}$, en ajoutant 2 aux éléments du type $\overline{L}C$ et en conservant les valeurs du reste de la matrice. Ensuite nous déterminons le couplage maximal.

| | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 11 | $0^*$ | 3 | 1 | 3 |
| $M_2$ | 0 | 8 | 2 | $0^*$ | 2 |
| $M_3$ | 6 | 5 | $0^*$ | 5 | 3 |
| $M_4$ | $0^*$ | 0 | 2 | 5 | 3 |
| $M_5$ | 3 | 3 | 5 | 0 | $0^*$ |

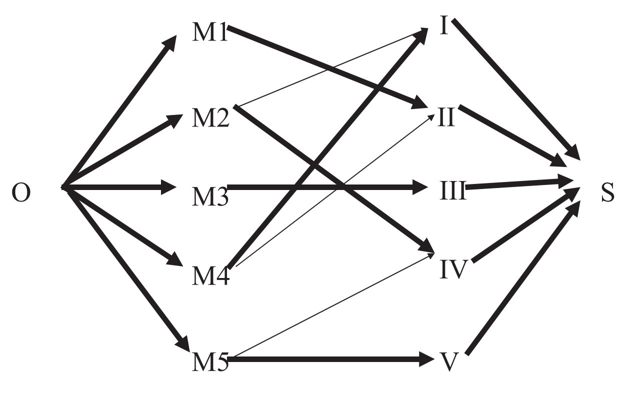
On obtient donc bien une affectation. Les couples optimaux sont donc :

$$\{M_1T_2;\ M_2T_4;\ M_3T_3;\ M_4T_1;\ M_5T_5\}$$

c) Le temps total minimal nécessaire à l'accomplissement des travaux est de $T = 3 + 4 + 4 + 5 + 1 = 17$ heures

d) On crée une origine et une sortie et un arc pour chaque couple de coût nul. On obtient alors le graphe du schéma 7 où les arcs sont tous de capacité 1. Le flot maximum est représenté sur le graphe où les arcs saturés du flot sont en gras. Le flot maximum est bien de 5. La question est : y a-t-il un autre moyen d'obtenir un flot de 5 ?

**Schéma 7.** *Exercice 1*




On voit que $M_1$ doit être affecté à $T_2$ (pas d'autre choix), cela implique que $M_4$ doit être affecté à $T_1$, du coup $M_2$ doit être affecté à $T_4$, ensuite $M_5$ doit être affecté à $T_5$. Enfin, $M_3$ ne peut plus être affecté qu'à $T_3$. On en déduit que la solution est bien unique.

# Exercice 2

a) On remarque tout d'abord qu'il n'y a que 6 magasins pour 7 animateurs. Il faut donc créer un magasin fictif $M_6$ associé à des volumes nuls de ventes. Le problème est de maximiser le volume total des ventes ; on transforme donc ce problème de maximisation en un problème de minimisation en multipliant par $-1$ toutes les cases. On obtient alors le problème d'affectation du tableau de gauche. Dans le tableau de droite, nous avons effectué la réduction (il suffit de faire la réduction par ligne puisque le magasin fictif assure la présence d'un zéro dans chaque colonne).

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $Min$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | $-4$ | $-5$ | $-4$ | $-9$ | $-5$ | $-2$ | $-9$ |
| $M_2$ | $-8$ | $-3$ | $-5$ | $-8$ | $-6$ | $-3$ | $-8$ |
| $M_3$ | $-4$ | $-2$ | $-2$ | $-3$ | $-8$ | $-1$ | $-8$ |
| $M_4$ | $-7$ | $-6$ | $-3$ | $-6$ | $-2$ | $-6$ | $-7$ |
| $M_5$ | $-9$ | $-8$ | $-6$ | $-2$ | $-7$ | $-4$ | $-9$ |
| $M_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$\rightarrow$

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 5 | 4 | 5 | 0 | 4 | 7 |
| $M_2$ | 0 | 5 | 3 | 0 | 2 | 5 |
| $M_3$ | 4 | 6 | 6 | 5 | 0 | 7 |
| $M_4$ | 0 | 1 | 4 | 1 | 5 | 1 |
| $M_5$ | 0 | 1 | 3 | 7 | 2 | 5 |
| $M_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

b) Nous devons maintenant définir le couplage maximal sur les liaisons de coûts nuls, puis appliquer la méthode de marquage des lignes et colonne car le couplage maximal n'est que de 4couples.

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 5 | 4 | 5 | $0^*$ | 4 | 7 | $L$ |
| $M_2$ | $0^*$ | 5 | 3 | 0 | 2 | 5 | $L$ |
| $M_3$ | 4 | 6 | 6 | 5 | $0^*$ | 7 | |
| $M_4$ | 0 | 1 | 4 | 1 | 5 | 1 | $L$ |
| $M_5$ | 0 | 1 | 3 | 7 | 2 | 5 | $L$ |
| $M_6$ | 0 | $0^*$ | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | $C$ | | | $C$ | | | |

$$\Rightarrow h = \min_{L,\overline{C}} c_{ij} = 1$$

On applique donc l'algorithme en retirant 1 sur les éléments de type $L\overline{C}$, en ajoutant 1 aux éléments du type $\overline{L}C$ et en conservant les valeurs du reste de la matrice. Ensuite nous déterminons le couplage maximal.

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 5 | 3 | 4 | $0^*$ | 3 | 6 |
| $M_2$ | $0^*$ | 4 | 2 | 0 | 1 | 4 |
| $M_3$ | 5 | 6 | 6 | 6 | $0^*$ | 7 |
| $M_4$ | 0 | 0 | 3 | 1 | 4 | $0^*$ |
| $M_5$ | 0 | $0^*$ | 2 | 7 | 1 | 4 |
| $M_6$ | 1 | 0 | $0^*$ | 1 | 0 | 0 |

Le couplage maximal est formé de 6 couples nous avons donc une affectation optimale. Il faut ainsi associer les couples suivants :

$$\{M_1A_4;\ M_2A_1;\ M_3A_5;\ M_4A_6;\ M_5A_2\}$$

Le dernier animateur $A_3$ étant affecté au magasin fictif, il ne fera rien. Cette 'affectation' donne un volume total maximal de $VT = 9 + 8 + 8 + 6 + 8 = 39$

c) La solution est de plus unique car il n'y avait aucun autre choix possible pour déterminer le dernier couplage maximal.