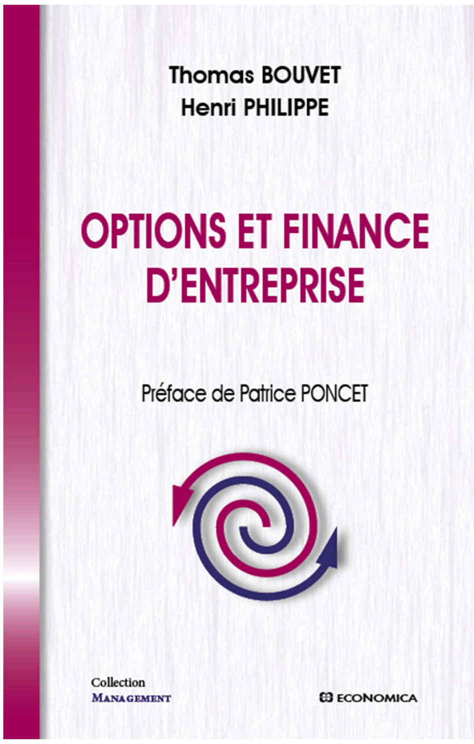
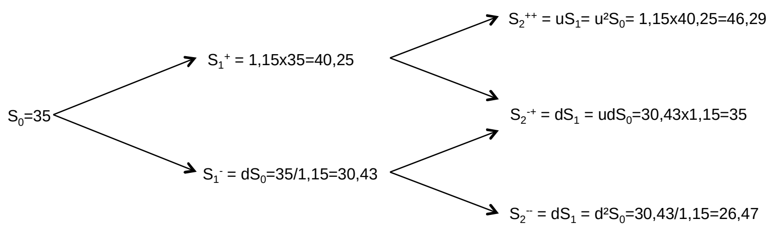

Thomas BOUVET
Henri PHILIPPE
OPTIONS ET FINANCE D'ENTREPRISE
Préface de Patrice PONCET
Collection
MANAGEMENT
ECONOMICA

Chapitre 2 : Approche de l'évaluation d'option

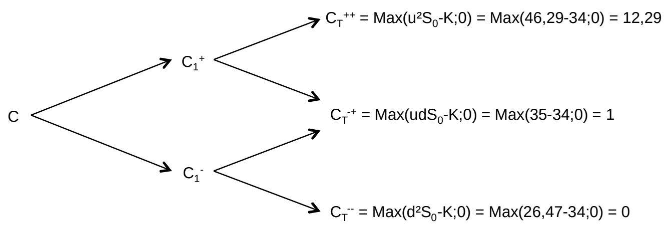
Exercice 2.1 : L'Escargot

Estimer à partir d'une binomiale deux périodes les valeurs d'une option d'achat et d'une option de vente, toutes deux de durée de vie deux périodes et de prix d'exercice 34 € sur une action de la société *L'Escargot*, sachant que nous disposons des informations suivantes : le cours de l'action est actuellement de 35 €, chaque période l'action peut monter d'un facteur u = 1,15 ou descendre d'un facteur d = 1/1,15. Le taux de l'argent sans risque est de 8 % par période.

Valeurs de l'action Escargot dans un modèle bipériode



Gains à l'échéance de ***l'option d'achat*** *Escargot dans un modèle bipériode*



En utilisant les probabilités risque neutre :

$$\pi = \left[\frac{1 + r_f - d}{(u - d)}\right] = \left[\frac{1{,}08 - 1/1{,}15}{1{,}15 - 1/1{,}15}\right] = 0{,}75$$

$$C_1^+ = \frac{1}{(1+r_f)}\left[\pi {C_T}^{++} + (1-\pi){C_T}^{\pm}\right] = \frac{1}{1{,}08}[0{,}75 \times 12{,}29 + 0{,}25 \times 1] = 8{,}77$$

$$C_1^- = \frac{1}{(1+r_f)}\left[\pi {C_T}^{\pm} + (1-\pi){C_T}^{--}\right] = \frac{1}{1{,}08}[0{,}75 \times 1 + 0{,}25 \times 0] = 0{,}69$$

$$C_0 = \frac{1}{(1 + r_f)}\left[\pi {C_1}^{+} + (1-\pi){C_1}^{-}\right] = \frac{1}{1{,}08}[0{,}75 \times 8{,}77 + 0{,}25 \times 0{,}69] = 6{,}25$$

C_0=6,25

Autre méthode : en calculant la composition du portefeuille répliquant :

$C_1^+ = \Delta_u S_1^+ + \beta_u$,

Avec $\Delta_u = \frac{{C_T}^{++} - {C_T}^{-+}}{({S_T}^{++} - {S_T}^{-+})} = \frac{12{,}29 - 1}{46{,}29 - 35} = 1$ *et* $\beta_u = \frac{{C_T}^{-+} - \Delta_u\ {S_T}^{-+}}{1 + r_f} = \frac{1 - 1 \times 35}{1{,}08} = -31{,}48$

C_1^+ = 1×40,25 -31,48 =8,77

$C_1^- = \Delta_d S_1^- + \beta_d$,

avec $\Delta_d = \frac{{C_T}^{+-} - {C_T}^{--}}{({S_T}^{+-} - {S_T}^{--})} = \frac{1 - 0}{35 - 26{,}47} = 0{,}12$ *et* $\beta_d = \frac{{C_T}^{--} - \Delta_d\ {S_T}^{--}}{1 + r_f} = \frac{0 - 0{,}12 \times 26{,}47}{1{,}08} = -2{,}87$

$C_1^- = 0{,}12 \times 30{,}43 - 2{,}87 = 0{,}69$

$C_0 = \Delta . S_0 + \beta,$

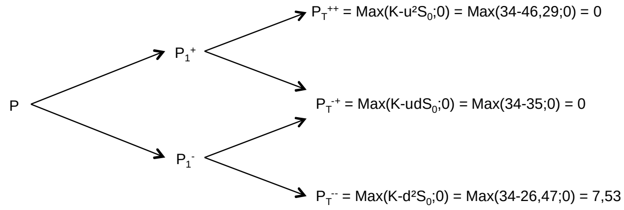
avec $\Delta = \frac{C_1^+ - C_1^-}{(S_1^+ - S_1^-)} = \frac{8{,}77 - 0{,}69}{40{,}25 - 30{,}43} = 0{,}82$

et $\beta = \frac{C_1^- - \Delta\ S_1^-}{1 + r_f} = \frac{0{,}69 - 0{,}82 \times 30{,}43}{1{,}08} = -22{,}54$

$C_0 = 0{,}82 \times 35 - 22{,}54$

$\boldsymbol{C_0 = 6{,}25}$

Gains à l'échéance de ***l'option de vente*** *Escargot dans un modèle bipériode*



$$P_1^+ = \frac{1}{(1 + r_f)}\left[\pi P_T^{++} + (1 - \pi) P_T^{\pm}\right] = \frac{1}{1{,}08}[0{,}75 \times 0 + 0{,}25 \times 0] = 0$$

$$P_1^- = \frac{1}{(1 + r_f)}\left[\pi P_T^{\pm} + (1 - \pi) P_T^{--}\right] = \frac{1}{1{,}08}[0{,}75 \times 0 + 0{,}25 \times 7{,}53] = 1{,}74$$

$$P_0 = \frac{1}{(1 + r_f)}\left[\pi P_1^+ + (1 - \pi) P_1^-\right] = \frac{1}{1{,}08}[0{,}75 \times 0 + 0{,}25 \times 1{,}74] = 0{,}40$$

$\boldsymbol{P_0 = 0{,}40}$

On peut vérifier par la relation de parité : $St = Ct(K) - Pt(K) + VAr_f(K)_{T-t}$:

$35 = 6{,}25 - 0{,}40 + \frac{34}{1{,}08^2}$

Refaire les calculs à partir du modèle de Black, Scholes et Merton en considérant que chaque période est de un an, la volatilité annuelle est de 15 % et le taux de l'argent sans risque est de 8 % annuel.

$C_0 = S_0 . N(d_1) - VAr_f(N)_T . N(d_2)$ *avec* $d_1 = \frac{ln(S_0/K) + r_f(T)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

$$d_1 = \frac{ln(35/34) + 0{,}08x2}{0{,}15\sqrt{2}} + \frac{1}{2} 0{,}15\sqrt{2} = 99{,}696\ et\ d_2 = 99{,}696 - 0{,}15\sqrt{2} = 0{,}78483$$

$N(d_1) = 0{,}8406$ *et* $N(d_2) = 0{,}7837 \Rightarrow C_0 = 35 \times 0{,}8406 - \frac{34}{1{,}08^2} \times 0{,}78483$

$\boldsymbol{C_0 = 6{,}54}$

$P_0 = -S_0 . N(-d_1) + VAr_f(N)_T . N(-d_2)$

$N(-d1) = 0{,}1594$ *et* $N(-d_2) = 0{,}2163 \Rightarrow C_0 = 35 \times 0{,}1594 + \frac{34}{1{,}08^2} \times 0{,}2163$

$\boldsymbol{P_0 = 0{,}73}$

Exercice 2.2 : Le portefeuille répliquant

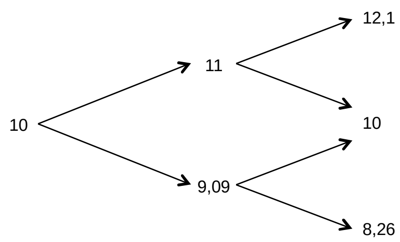
Vous êtes teneur de marché sur les options d'achat et vous avez émis au début de la période précédente des options d'achat sur les actions de la société *Le Caméléon*, de durée deux périodes et de prix d'exercice 9 €. L'action cote à présent 9,09 € et vous devez réajuster la couverture que vous aviez mise en place à l'origine (un achat de 9 274 actions à 10 € et un emprunt de 72 310 €), lorsque vous aviez vendu 10 000 options pour un prix global de 20 430 €. Il convient de savoir que le taux d'intérêt sans risque (taux période discret) est de 6,18 % et la volatilité que vous aviez prise en compte à l'origine est de 10 % (approximée par un coefficient u = 1,1).

Expliquez comment ont été déterminés les montants initiaux et ce que vous devez faire à présent pour réajuster votre couverture.

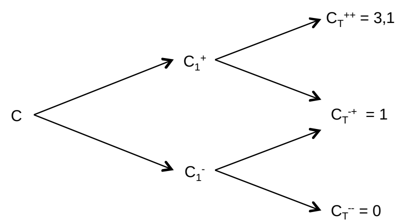
En utilisant les probabilités risque neutre :

$$\pi = \left[\frac{1 + r_f - d}{(u - d)}\right] = \left[\frac{1{,}0618 - 1/1{,}1}{1{,}1 - 1/1{,}1}\right] = 0{,}8$$

Valeurs de l'action Le caméléon dans un modèle bipériode



Valeurs possibles de l'option



$$C_1^+ = \frac{1}{(1+r_f)}\left[\pi C_T{}^{++} + (1-\pi)C_T{}^{\pm}\right] = \frac{1}{1{,}0618}[0{,}8 \times 3{,}1 + 0{,}2 \times 1] = 2{,}524$$

$$C_1^- = \frac{1}{(1 + r_f)}\left[\pi C_T{}^{\pm} + (1-\pi)C_T{}^{--}\right] = \frac{1}{1{,}0618}[0{,}8 \times 1 + 0{,}2 \times 0] = 0{,}753$$

$$C_0 = \frac{1}{(1 + r_f)}\left[\pi C_1{}^{+} + (1-\pi)C_1{}^{-}\right] = \frac{1}{1{,}0618}[0{,}8 \times 2{,}524 + 0{,}2 \times 0{,}753] = 2{,}043$$

Constitution du portefeuille d'arbitrage à l'origine : $\Delta = \frac{C_1{}^{+} - C_1{}^{-}}{(S_1{}^{+} - S_1{}^{-})} = \frac{2{,}524 - 0{,}753}{11 - 9{,}09} = 0{,}9274$

et $\beta = \frac{C_1{}^{-} - \Delta\ S_1{}^{-}}{1 + r_f} = \frac{0{,}753 - 0{,}9274 \times 9{,}09}{1{,}0618} =$ *-7,231*

=> achat de 9 274 actions (-92 740 €), vente de 10 000 options (+20 430 €) et emprunt au taux sans risque de 72 310 €.

Après 1 période, si l'action cote 9,09 € :

$$\Delta_d = \frac{C_T{}^{+-} - C_T{}^{--}}{(S_T{}^{+-} - S_T{}^{--})} = \frac{1-0}{10-8{,}26} = 0{,}5747 \ \textit{et} \ \beta_d = \frac{C_T{}^{--} - \Delta_d \ S_T{}^{--}}{1+r_f} = \frac{0-0{,}5747x \ 8{,}26}{1{,}0618} = 4{,}471$$

=> il faut alors disposer de 5 747 actions (0,5747 × 10 000), soit un vente de 3527 actions (9 274 – 5 747) au prix de 9,09 €, soit un montant de 32 060 €. L'emprunt passe à 44 710 €, soit une diminution de l'emprunt de 27 600 €. Compte-tenu des intérêts à payer pour la première période de 6,18% de 72 310 €, soit 4 469 €, l'ajustement se fait bien sans décaissement (32 060 – 27 600 – 4 469 = 0, aux arrondis de calcul près).

Exercice 2.3 : Impact d'une clause de forçage

Soit une option d'achat sur une action de la société *La Puce* dont les caractéristiques sont les suivantes :

Cours de l'action *La Puce* : 100 €

Volatilité de l'action : u = 1,1

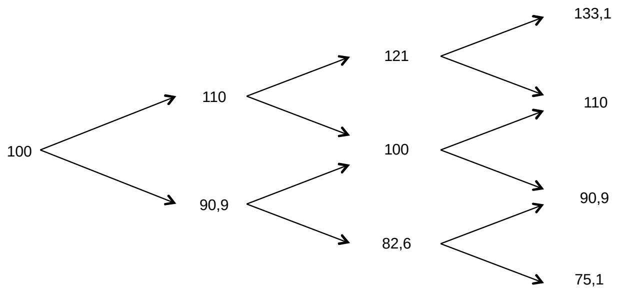
Durée de l'option : 3 périodes

Prix d'exercice : 105 €

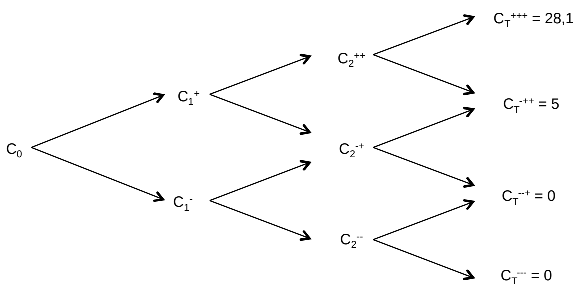
Forçage si le cours dépasse 120 €

Sachant que le taux sans risque est de 3 %, déterminer la valeur de l'option sans et avec la clause de forçage.

Valeurs de l'action La Puce dans un modèle tripériode



Gains à l'échéance de l'option d'achat La Puce dans un modèle tripériode en l'absence de clause de forçage



$$\pi = \left[\frac{1 + r_f - d}{(u - d)}\right] = \left[\frac{1{,}03 - 1/1{,}1}{1{,}1 - 1/1{,}1}\right] = 0{,}633$$

$$C_2^{++} = \frac{1}{(1+r_f)}\left[\pi C_T{}^{+++} + (1-\pi) C_T{}^{-++}\right] = \frac{1}{1{,}03}[0{,}633 \times 28{,}1 + 0{,}367 \times 5] = 19{,}06$$

$$C_2^{-+} = \frac{1}{(1+r_f)}\left[\pi C_T{}^{-++} + (1-\pi)C_T{}^{--+}\right] = \frac{1}{1{,}03}[0{,}633 \times 5 + 0{,}367 \times 0] = 3{,}07$$

$$C_2^{--} = \frac{1}{(1\,+\,r_f)}\left[\pi C_T{}^{--+} + (1-\pi)C_T{}^{---}\right] = \frac{1}{1{,}03}[0{,}633 \times 0 + 0{,}367 \times 0] = 0$$

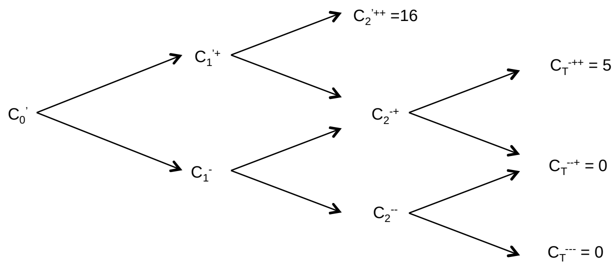
$$C_1^{+} = \frac{1}{(1+r_f)}\left[\pi C_2{}^{++} + (1-\pi)C_2{}^{-+}\right] = \frac{1}{1{,}03}[0{,}633 \times 19{,}06 + 0{,}367 \times 3{,}07] = 12{,}81$$

$$C_1^{-} = \frac{1}{(1\,+\,r_f)}\left[\pi C_2{}^{-+} + (1-\pi)C_2{}^{--}\right] = \frac{1}{1{,}03}[0{,}633 \times 3{,}07 + 0{,}367 \times 0] = 1{,}89$$

$$C_0 = \frac{1}{(1\,+\,r_f)}\left[\pi C_1{}^{+} + (1-\pi)C_1{}^{-}\right] = \frac{1}{1{,}03}[0{,}633 \times 12{,}81 + 0{,}367 \times 1{,}89] = 8{,}55$$

C_0= 8,55 en l'absence de forçage

Gains à l'échéance de l'option d'achat La Puce dans un modèle tripériode avec prise en compte de la clause de forçage



$$C_1'^{+} = \frac{1}{(1+r_f)}\left[\pi C_2{}^{++} + (1-\pi)C_2{}^{-+}\right] = \frac{1}{1{,}03}[0{,}633 \times \mathbf{16} + 0{,}367 \times 3{,}07] = 10{,}93$$

$$C_0' = \frac{1}{(1\,+\,r_f)}\left[\pi C_1{}'^{+} + (1-\pi)C_1{}^{-}\right] = \frac{1}{1{,}03}[0{,}633 \times \mathbf{10{,}93} + 0{,}367 \times 1{,}89] = 7{,}39$$

C'_0= 7,39 avec la clause de forçage